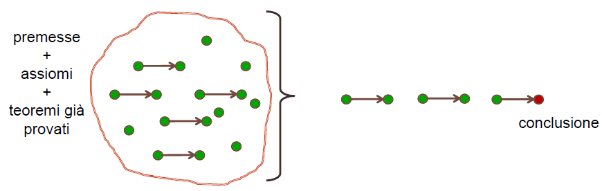
**2. DIMOSTRAZIONI**

Una ***dimostrazione*** è un ragionamento corretto che stabilisce la verità di un asserzione matematica.

Attraverso l’uso di altre asserzioni vere:

* *ipotesi del teorema;*
* *assiomi che si assumono essere veri;*
* *teoremi dimostrati precedentemente.*

Un problema importante di una dimostrazione si ha quando comprendere se un ragionamento è corretto, e quale metodo usare.

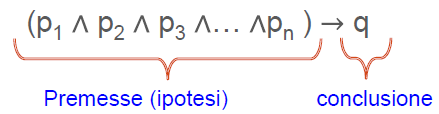
Consideriamo il caso p 🡪 q = T, quindi:

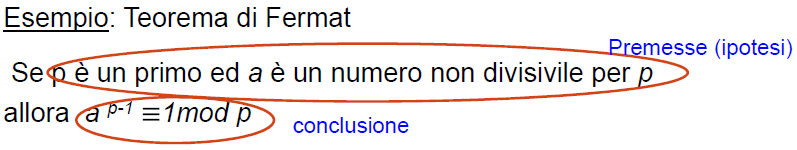
* Se p è F allora indipendentemente dal valore di q abbiamo p → q è T;
* Se p è T allora dobbiamo provare anche q è T per avere p → q è T.

**2.1 TEOREMI**

Un ***teorema*** è una asserzione che si può dimostrare essere vera.

Tipicamente un teorema lo si può vedere in questo modo:





Ci sono diversi *metodi di base* per provare teoremi.

|  |
| --- |
| NOTA: Non tutti i metodi di dimostrazione vanno bene in tutti i casi, infatti può accadere che un metodo dimostrativo si rivela più semplice di altri.  Può essere perciò necessario tentare più di un approccio.  Inoltre, alcune dimostrazioni possono richiedere l’utilizzo di più di un tipo di dimostrazione. |

**2.2 DIMOSTRAZIONE DIRETTA**

|  |
| --- |
| **p → q viene dimostrata mostrando che “ *se p è T allora q è T* ”.** |

In maniera diretta:

* si parte dal fatto che p è ***T***;
* si fanno una serie di deduzioni, usando assiomi, definizioni e teoremi precedentemente provati per arrivare a dire che anche q è ***T***.

*Esempio1*:

Sia n un intero. Provare che “*Se n è dispari, allora n2 è dispari.*”

*Dim*:

* Assumiamo che l’ipotesi sia vera, cioè n è dispari;
* Allora n = 2k + 1, dove k è un qualunque intero;
* n2 = (2k + 1)2

= 4k2 + 4k + 1

= 2(2k2 + 2k) + 1

* Perciò, n2 è dispari.

*Esempio2*:

Siano n ed m interi. Provare che “*Se n ed m sono dispari, allora n+m è pari.*”

*Dim*:

* Assumiamo che l’ipotesi sia vera, cioè n ed m siano dispari;
* Allora n = 2k + 1 e m = 2h + 1 dove k ed h sono due qualunque interi;
* n+m = (2k + 1) + (2h + 1)

= 2k + 2h + 2

* Perciò, n+m è pari.

**2.3 DIMOSTRAZIONE PER CONTRAPPOSIZIONE**

|  |
| --- |
| **p → q viene dimostrata mostrando che “ *se (¬q è T) allora (p è F )* ” / “ *se (¬q è T) allora (¬p è T)* ”.** |
| **NOTA: Ciò che si dimostra è che “ se ¬q è T allora ¬p è T ”.**  **Si ricordi che: ¬q → ¬p ≡ p → q *contronominale*** |

*Esempio*:

Provare che “*Se 3n +2 è dispari, allora n è dispari.*”

*Dim*:

* Assumiamo al contrario che *n è pari*, cioè n=2k, dove k è un intero
* 3n + 2 = 3(2k) + 2

= 6k + 2

= 2(3k + 1)

* Così *3n +2 è pari* . Quindi *3n +2 è dispari ≡ F*

**2.4 DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE (ASSURDO)**

|  |
| --- |
| **p → q viene dimostrata mostrando che “*se [(p è T) e (¬q è T) ] allora F* ”** |

cioè: si parte dal fatto che

* ¬q è T
* p è T

Si fanno una serie di deduzioni, usando assiomi, definizioni e teoremi precedentemente provati per arrivare ad una asserzione ***F***.

L’approccio è corretto perché: (p ¬q ) → **F** ≡ ¬ (p ¬q ) **F**

≡ ¬ (p ¬q )

≡ ¬p q

≡ p → q

*Esempio1*:

Provare che “*Se 3n +2 è dispari, allora n è dispari.*”

*Dim*:

* Assumiamo al contrario che n è pari, cioè n=2k, dove k è un intero;
* Per ipotesi sappiamo che 3n +2 è dispari, cioè 3n+2 =2h+1, dove h è un intero;
* 2h+1 = 3n + 2

= 3(2k) + 2

= 6k + 2 che è ovviamente pari

* Ma questo è F (è assurdo) poiché 2h+1 è dispari

*Esempio2*:

Siano x e y due numeri reali. Provare che “*Se 5x + 25y = 1723, allora x o y non sono interi.*”

*Dim*:

* Assumiamo al contrario che x e y sono interi
* 5x + 25y = 1723

5(x + 5y) = 1723

x + 5y = 1723/5

ma 1723 non è divisibile per 5 => x + 5y non è un intero

* Ma questo è F (è assurdo) poiché sappiamo che x e y sono interi

**2.5 DIMOSTRAZIONE DI EQUIVALENZA**

|  |
| --- |
| **p ⟷ q è dimostrata con (p → q) (q → p)** |

*Esempio1*:

“*n è dispari se e solo se n2 è dispari*”

*Dim. di* ***p 🡪 q***:

* Dobbiamo provare che: Se n è dispari allora n2 è dispari
* Usiamo la ***dimostrazione diretta***
* Supponiamo che n sia dispari. Allora n = 2k + 1, dove k è un intero
* n2 = (2k + 1)2

= 4k2 + 4k + 1

= 2(2k2 + 2k) + 1

* Perciò, n2 è dispari.

*Dim. di* ***q 🡪 p***:

* Dobbiamo provare che: Se n2 è dispari allora n è dispari
* Usiamo la ***dimostrazione indiretta***, cioè proviamo (¬p → ¬q)
* Supponiamo che n sia pari. Allora n = 2k, dove k è un intero
* n2 = (2k)2 = 4k2
* Perciò, n2 è pari.

*Poiché entrambe (p → q) e (q → p) sono vere, l’equivalenza è vera*

A volte i teoremi affermano che più proposizioni sono equivalenti:

* Vogliamo provare che p1 ↔ p2 ↔ …… ↔ pn
* Tutte le proposizioni p1 , p2 , …… , pn hanno lo stesso valore di verità
* Un modo per provarlo è provare la seguente proposizione equivalente (p1 → p2) (p2 → p3) …… (pn → p1)

*Esempio2*:

Mostrare che le seguenti asserzioni sono equivalenti.

p1 : n è pari p2 : n−1 è dispari p3 : n2 è pari

*Dim*: Proveremo che ***p1 → p2 , p2 → p3 , p3 → p1***,

***p1 → p2***

* Se n è pari, allora n = 2k, dove k è un intero
* n − 1 = 2k – 1 = 2(k − 1) + 1 che è un intero dispari

***p2 → p3***

* Se n−1 è dispari, allora n − 1 = 2k + 1, dove k è un intero
* n2 = (2k +2)2 =4k2 + 8k + 4 = 2(2k2 + 4k +2) che è un intero pari

***p3 → p1***

* Per contrapposizione supponiamo che n sia dispari, cioè n = 2k + 1, dove k è un intero
* n2 = (2k + 1)2 = 4k2 + 4k + 1 = 2(2k2 + 2k) + 1 che è un intero dispari

**2.6 DIMOSTRAZIONE BANALE**

|  |
| --- |
| **Vogliamo provare che p → q. Se la conclusione *q è sempre vera*, allora *p → q* è banalmente *vera*.** |

*Esempio1*:

Sia P(n): “se a ≥ b allora an ≥ bn ”. Mostrare che P(n) → P(0).

*Dim*:

* a0 >=b0 è 1=1 che è banalmente vera indipendentemente da n.

*Esempio2*:

Proviamo che *‘Se x>0 allora (x+1)2 – 2x x2’*

**Siamo giunti alla conclusione senza usare l’ipotesi**

*Dim*:

* (x+1)2 – 2x = (x2 + 2x +1) -2x

= x2 +1 x2

**2.7 DIMOSTRAZIONE VUOTA**

|  |
| --- |
| **Vogliamo provare che p → q. Se l’ipotesi p è *sempre falsa* allora p → q è banalmente *vera*.**  **F → q è sempre T, sia che q sia True o False.** |

*Esempio*:

Sia P(n): “*se n ≥ 1 allora n2 ≥ 1* ”. Mostrare che (se n=0) → P(0)

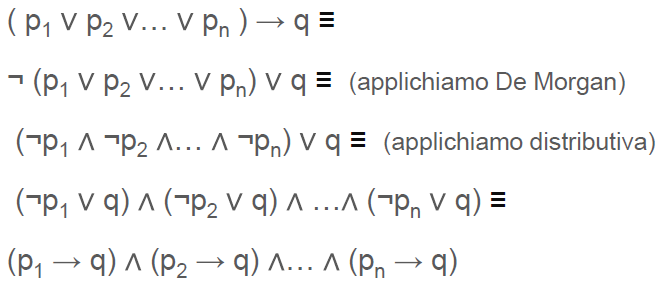
*Dim*:

* Per n=0 l’ipotesi di P(n) è falsa.
* Così P(0) è sempre vera.

**2.8 DIMOSTRAZIONE PER ANALISI DEI CASI**

|  |
| --- |
| **Vogliamo provare che (p1 p2 … pn ) → q**  **È equivalente a (p1 → q) (p2 → q) … (pn → q)** |

Questo perché:



Quindi si prova la verità di tutti i casi, uno per uno…

*Esempio1*:

Mostrare che |x||y|=|xy| per x ed y reali

*Dim*:

Consideriamo i possibili valori di x e y. Sono possibili 4 casi:

1. x ≥ 0, y≥0 => xy ≥0 e |xy|=xy=|x||y|
2. x ≥ 0, y <0 => xy ≤ 0 e |xy|= − xy =x (−y)=|x||y|
3. x < 0, y ≥ 0 => xy ≤ 0 e |xy|=− xy =(− x) y=|x||y|
4. x <0, y <0 => xy >0 e |xy|= (− x)(− y) =|x||y|

Tutti i casi sono provati…

*Esempio2*:

*Sia n Z. Provare che 9n2+3n−2 è pari.*

*Dim*:

Per prima cosa consideriamo che 9n2+3n-2=(3n+2)(3n−1)

Poiché n è un intero, allora (3n+2)(3n-1) è il prodotto di due interi. Consideriamo 2 casi:

1. Assumiamo 3n+2 è pari:

9n2+3n−2 è banalmente pari perché è il prodotto di due interi di cui uno pari

1. Assumiamo 3n+2 è dispari:

3n+2−3 è pari → 3n−1 è pari → 9n2+3n−2 è pari perché uno dei suoi fattori è pari

Tutti i casi sono provati…

**2.8.1 DIMOSTRAZINE ESAUSTIVA**

Alcuni teoremi possono essere provati esaminando un numero relativamente piccolo di esempi.

- È un ***tipo speciale di dimostrazione per casi***

- Ogni caso consiste nel controllare un singolo esempio

*Esempio*:

(n+1)3≥ 3n se n è un intero positivo con n ≤ 4

*Dim*:

Bisogna verificare (n+1)3≥ 3n solo neli casi n=1,2,3,4

- n=1 (n+1)3 = (1+1) 3 =8 3n = 31 = 3

- n=2 (n+1)3 = (2+1) 3 =27 3n = 32 = 9

- n=3 ……….

- n=4 ……….

**2.9 DIMOSTRAZIONE CON QUANTIFICATORI**

|  |
| --- |
| **Asserzioni espresse con un quantificatore esistenziale – dimostrazioni di esistenza**  **- Vogliamo provare che x P(x)** |

***Costruttiva***:

- Trovare un esempio che mostri che l’asserzione vale

*Esempio*:

Esiste un intero che può essere scritto in due diversi modi come la somma di cubi di interi positivi.

*Dim*:

1729 = 103 + 93 = 123 + 13

***Non-costruttiva:***

- Se non si trova un esempio calzante, si opta per una dimostrazione per assurdo in cui si nega l’asserzione esistenziale e si mostra che ciò implica una contraddizione:

* Si assume che vale x P(x) x P(x)
* Poi si arriva ad una contraddizione

*Esempio*: (Pigeon Hole Principle)

Se n+1 oggetti sono distribuiti in n scatole allora qualche scatola deve contenere almeno 2 oggetti.

*Dim*:

* Assumiamo di avere n+1 oggetti, e n scatole identificate con B1,B2,…,Bn
* Per contrapposizione supponiamo che ***nessuna*** scatola contiene più di 1 oggetto

ki = il numero di oggetti posti nella scatola Bi , per i=1,…, n

ki ≤ 1

Allora k1 +k2 +……+kn ≤ 1+1+……+1 = n

* Ma questo contraddice l’ipotesi k1 +k2 +……+kn = n +1.

|  |
| --- |
| **Asserzioni espresse con una *negazione* di un quantificatore *esistenziale*.**  **- Vogliamo provare che ¬x P(x) ≡ x ¬ P(x)** |

Lo si prova:

* rapportandolo al quantificatore universale, oppure
* si procede per assurdo ipotizzando l’esistenza di un elemento x che soddisfa P(x) e arrivando ad una contraddizione

*Esempio*:

Il numero √2 è un irrazionale

* Si ricordi che l’asserzione: Il numero √2 è un irrazionale

è equivalente a: Non esistono due interi p e q tale che √2 = p/q

simbolicamente può essere espressa come: ¬( pZ qZ ( √2 = p/q ) )

* In questo caso l’ipotesi non è specificata, abbiamo solo la tesi.

*Dim*:

* Assumiamo ***per contraddizione*** che √2 è un razionale, cioè √2 = p/q, dove ***p e q sono due numeri naturali che non hanno fattori comuni***.
* 2 = p2/q2

2 q2= p2

p2 è pari

p è pari (infatti dispari2 = dispari),c’è un intero r : p = 2r

2 q2= p2 = 4r2

q2= 2r2

q è pari

***p e q hanno il fattore 2 in comune***

* Questa è una contraddizione. Perciò √2 è un irrazionale

|  |
| --- |
| **Asserzioni espresse con un quantificatore *universale*: Vogliamo provare che x P(x)** |

Provare che la proprietà vale per tutti i valori nel dominio (può essere complicato), si può utilizzare la dimostrazione per analisi dei casi (con suddivisione della dimostrazione per sottogruppi).

*Esempio*:

Siano n ed m interi. Provare che “*Se n ed m sono dispari, allora n+m è pari.*”

*Dim*:

* Assumiamo che l’ipotesi sia vera, cioè n ed m siano dispari;
* Allora n = 2k + 1 e m = 2h + 1 dove k ed h sono due qualunque interi;
* n+m = (2k + 1) + (2h + 1)

= 2k + 2h + 2

* Perciò, n+m è pari.

In questa dimostrazione non viene fatta alcuna restrizione sugli interi n ed m se non l’ipotesi dell’implicazione: *n ed m sono interi*

*arbitrari*. Quindi la dim precedente prova anche ***∀nZ ∀mZ*** (Se ***n ed m sono dispari***, allora ***n+m è pari***).

|  |
| --- |
| **Asserzioni espresse con una *negazione* di un quantificatore *universale*: Vogliamo provare che ¬x P(x) ≡ x ¬ P(x)** |

*Controesempi*: Simile alla dimostrazione costruttiva di esistenzialità.